

14 Combinatoria y probabilidad



1. Variaciones y permutaciones

PIENSA Y CALCULA

Un restaurante oferta, en el menú del día, 5 platos de primero, 4 de segundo y 3 de postre. ¿Cuántos menús diferentes se pueden pedir?

Solución:

Nº de menús: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

APLICA LA TEORÍA

1 Calcula mentalmente:

- a) $V_{5,3}$ b) $VR_{6,2}$ c) P_4 d) PC_6

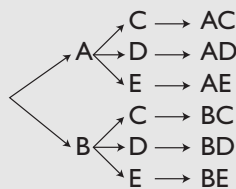
Solución:

- a) $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$
 b) $6^2 = 36$
 c) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
 d) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

2 Dibuja el árbol correspondiente a las distintas formas en que puede vestirse una persona que tiene dos camisas y tres pantalones. ¿Cuántas son?

Solución:

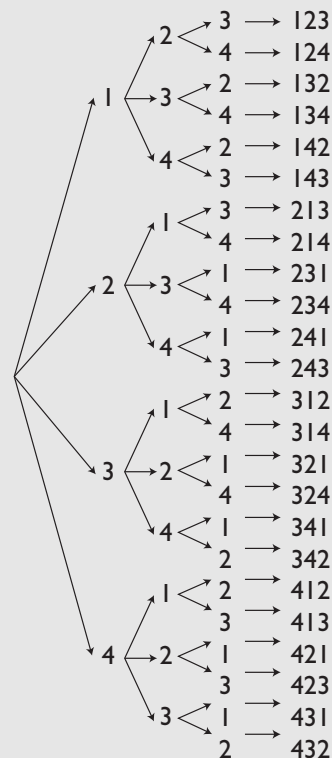
Sean las camisas A y B y los pantalones C, D y E



Número = $2 \cdot 3 = 6$

3 Con los dígitos 1, 2, 3 y 4 forma todos los números de tres cifras que puedas sin que se repita ninguna. ¿Cuántos son?

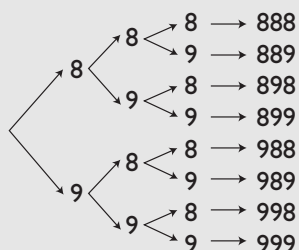
Solución:



$$V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

4 Con los dígitos 8 y 9, forma todos los números de tres cifras que puedas. ¿Cuántos son?

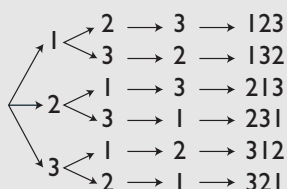
Solución:



$$VR_{2,3} = 2^3 = 8$$

5 Con los dígitos 1, 2 y 3 forma todos los números de tres cifras que puedas sin que se repita ninguna. ¿Cuántos son?

Solución:



$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

6 ¿De cuántas formas se pueden sentar 5 personas alrededor de una mesa circular, de forma que en cada caso haya al menos dos personas sentadas en diferente orden?

Solución:

$$PC_5 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

7 El sistema actual de matrículas dice: «En las placas de matrícula se inscribirán dos grupos de caracteres constituidos por un número de cuatro cifras, que irá desde el 0000 al 9999, y de tres letras, empezando por las letras BBB y terminando por las letras ZZZ, suprimiéndose las cinco vocales y las letras Ñ, Q, CH y LL».

¿Cuántas matrículas hay con las letras BBB?

Solución:

$$VR_{10,4} = 10^4 = 10\,000$$

8 Halla, usando la calculadora:

- a) $V_{10,4}$ b) $VR_{6,4}$
 c) P_{10} d) PC_{12}

Solución:

- a) 5 040 b) 1 296
 c) 3 628 800 d) 39 916 800

2. Combinaciones y resolución de problemas

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente el valor de los siguientes números combinatorios:

- a) $\binom{7}{0}$ b) $\binom{8}{1}$ c) $\binom{5}{5}$ d) $\binom{6}{5}$

Solución:

- a) 1 b) 8 c) 1 d) 6

9 Calcula mentalmente:

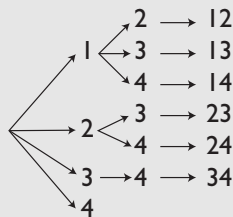
- a) $C_{5,2}$ b) $C_{6,4}$

Solución:

- a) $5 \cdot 4/2 = 10$
 b) $C_{6,4} = C_{6,2} = 6 \cdot 5/2 = 15$

10 Con los dígitos 1, 2, 3 y 4 forma todos los números de dos cifras que puedas sin que se repita ninguna y de modo que ningún par de números tenga las mismas cifras.

Solución:



$C_{4,2} = 4 \cdot 3/2 = 6$

11 ¿Cuántas columnas de quinielas hay que cubrir como mínimo para acertar una de pleno al 15?

Solución:

- a) $E = \{1, X, 2\}$, $m = 3$. Dos ejemplos significativos son: XIX11112121XX11, 111XXX111XXXIX1, $p = 15$
 b) Influye el orden, no entran todos los elementos y puede haber repetición \Rightarrow Variaciones con repetición.
 c) $VR_{3,15} = 3^{15} = 14\,348\,907$

12 En una clase hay 25 alumnos. ¿De cuántas formas se puede elegir un delegado y un subdelegado?

Solución:

- a) $E = \{1, 2, 3, 4, \dots, 25\}$, $m = 25$. Dos ejemplos significativos son: 35, 53, $p = 2$
 b) Influye el orden, no entran todos los elementos y no puede haber repetición \Rightarrow Variaciones ordinarias.
 c) $V_{25,2} = 25 \cdot 24 = 600$

13 ¿Cuántas diagonales tiene un decágono?

Solución:

- a) $E = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$, $m = 10$. Dos ejemplos significativos son: 25, 79, $p = 2$
 b) No influye el orden \Rightarrow Combinaciones ordinarias. Hay que quitar los lados.
 c) $C_{10,2} - 10 = \binom{10}{2} - 10 = 45 - 10 = 35$

14 Con 8 jugadores, ¿cuántos equipos de baloncesto se pueden formar, si cada jugador puede jugar en cualquier puesto?

Solución:

- a) $E = \{1, 2, 3, 4, \dots, 8\}$, $m = 8$. Dos ejemplos significativos son: 25 318, 53 467, $p = 5$
 b) No influye el orden \Rightarrow Combinaciones ordinarias.
 c) $C_{8,5} = \binom{8}{5} = \binom{8}{3} = 56$

15 Halla, usando la calculadora:

- a) $C_{7,3}$ b) $C_{8,4}$

Solución:

- a) 35 b) 70

3. Experimentos aleatorios simples

PIENSA Y CALCULA

¿Cuántas caras tiene un dado de quinielas? ¿Qué es más probable obtener: 1, X o 2?

Solución:

Un dado de quinielas tiene 6 caras, tres caras tienen un 1, dos caras tienen una X y una cara tiene un 2. El más probable es el 1, por que es el que más veces está.

APLICA LA TEORÍA

16 Sean $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{3, 6\}$. Calcula:

- a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) \bar{A} d) \bar{B}

Solución:

- a) $\{2, 3, 4, 6, 8\}$
b) $\{6\}$
c) $\{1, 3, 5, 7\}$
d) $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$

17 Halla la probabilidad de obtener par al lanzar un dado de 6 caras.

Solución:

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 $\text{Par} = \{2, 4, 6\}$
 $P(\text{par}) = 3/6 = 1/2$

18 Se sabe que $P(A) = 5/6$. Halla $P(\bar{A})$

Solución:

$$P(\bar{A}) = 1 - 5/6 = 1/6$$

19 Se lanzan 100 chinchetas al aire y 65 quedan con la punta hacia arriba. Halla la frecuencia relativa de que la chincheta quede con la punta hacia arriba.

Solución:

$$f(\text{punta hacia arriba}) = \frac{65}{100} = 0,65$$

20 Se sabe que:

$$P(A) = 2/3, P(B) = 1/2 \text{ y } P(A \cap B) = 1/5$$

Calcula $P(A \cup B)$

Solución:

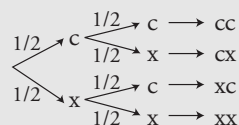
$$P(A \cup B) = 2/3 + 1/2 - 1/5 = 29/30$$

4. Experimentos aleatorios compuestos

PIENSA Y CALCULA

Diseña un árbol de probabilidades para el experimento de lanzar dos monedas al aire.

Solución:



21 Se lanzan dos dados de 6 caras numeradas del 1 al 6. Calcula la probabilidad de que la suma de los números obtenidos sea 9

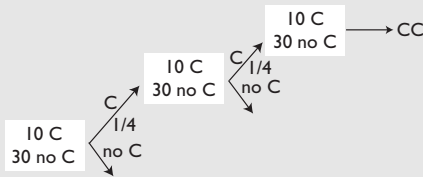
Solución:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$P(9) = 4/36 = 1/9$

22 Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas, se observa si ha sido de copas y se vuelve a introducir; luego se extrae otra carta. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean de copas?

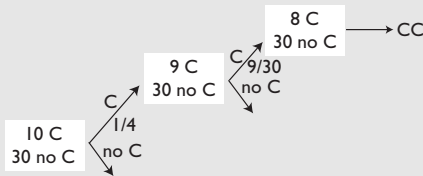
Solución:



$P(CC) = 1/4 \cdot 1/4 = 1/16$

23 Se extraen de una vez dos cartas de una baraja española de 40 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean de copas?

Solución:

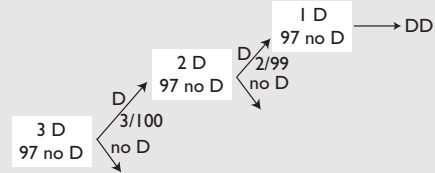


$P(CC) = 1/4 \cdot 9/30 = 3/40$

24 Una máquina produce 100 tornillos de los que 3 son defectuosos. Si se cogen dos tornillos, halla la probabilidad de que al coger el segundo sea defectuoso, con la condición de que el primero también

haya sido defectuoso. ¿Cómo son ambos sucesos, dependientes o independientes?

Solución:



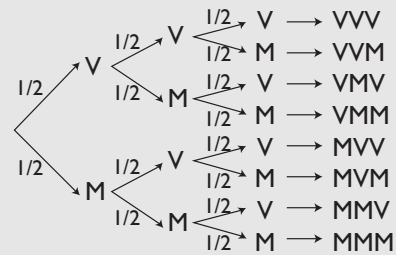
D/D es la segunda rama.

$P(D/D) = 2/99$

El segundo suceso D/D es dependiente del primero D, pues depende de si ha salido D o no D

25 Una familia tiene tres hijos. Halla la probabilidad de que los tres sean varones.

Solución:

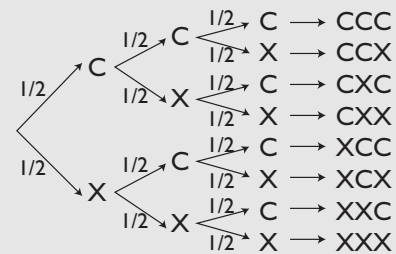


Se aplica la regla del producto o de la probabilidad compuesta.

$P(VVV) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$

26 Se lanzan tres monedas al aire. Halla la probabilidad de obtener dos caras y una cruz.

Solución:



Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total.

$P(CCX) + P(CXC) + P(XCC) = 1/8 + 1/8 + 1/8 = 3/8$

Ejercicios y problemas

1. Variaciones y permutaciones

27 Calcula mentalmente:

- a) $V_{10,3}$
b) $VR_{10,3}$

Solución:

- a) $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$
b) $10^3 = 1000$

28 Calcula mentalmente:

- a) P_5
b) PC_4

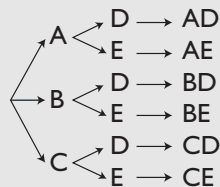
Solución:

- a) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
b) $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

29 Organizamos una fiesta y llevamos tres clases de bocadillos y dos clases de refrescos. Dibuja el árbol correspondiente a las distintas formas de elegir un bocadillo y un refresco. ¿Cuántas son?

Solución:

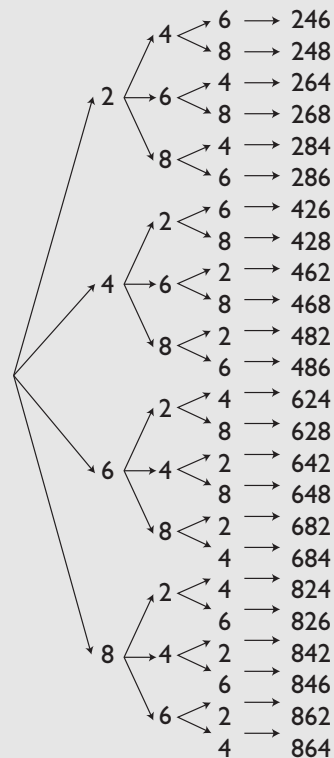
Sean los bocadillos A, B y C y los refrescos D y E



Número = $3 \cdot 2 = 6$

30 Con los dígitos 2, 4, 6 y 8 forma todos los números de tres cifras que puedas sin que se repita ninguna cifra. ¿Cuántos son?

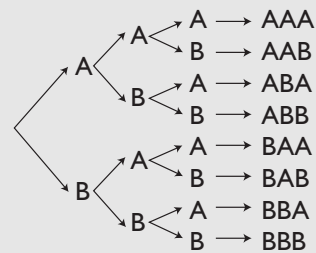
Solución:



$V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

31 Con las letras A y B forma todas las palabras de tres letras que puedas, tengan o no sentido. ¿Cuántas son?

Solución:

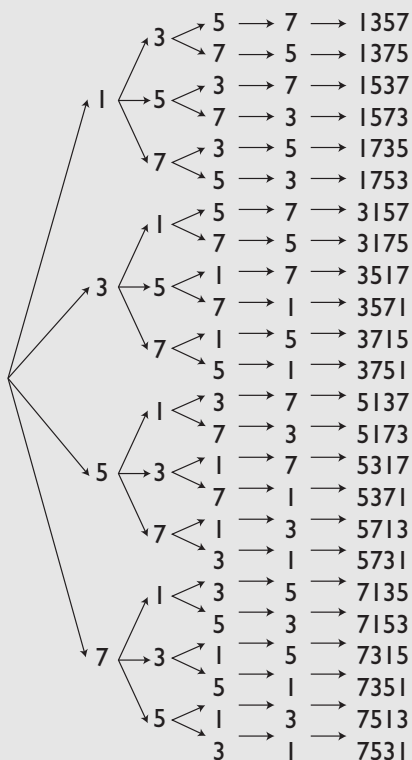


$VR_{2,3} = 2^3 = 8$

32 Con los dígitos 1, 3, 5 y 7 forma todos los números de cuatro cifras que puedas sin que se repita ninguna cifra. ¿Cuántos son?

Ejercicios y problemas

Solución:



$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

33 ¿De cuántas formas se pueden sentar 10 personas alrededor de una mesa circular, de forma que en cada caso haya al menos dos personas sentadas en diferente orden?

Solución:

$$PC_{10} = 9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362\,880$$

34 En el sistema actual de matrículas, ¿de cuántas formas se pueden colocar las letras sabiendo que cada matrícula contiene tres letras, empezando por las letras BBB y terminando por las letras ZZZ, suprimiéndose las cinco vocales, y las letras Ñ, Q, CH y LL?

Solución:

BCDFGHJKLMNPRSTVWXYZ

$$VR_{20,3} = 20^3 = 8\,000$$

35 Calcula, usando la calculadora:

a) $V_{8,5}$

b) $VR_{7,3}$

Solución:

a) 6 720

b) 343

36 Calcula, usando la calculadora:

a) P_6

b) PC_8

Solución:

a) 720

b) 5 040

2. Combinaciones y resolución de problemas

37 Calcula mentalmente:

a) $C_{10,2}$

b) $C_{11,9}$

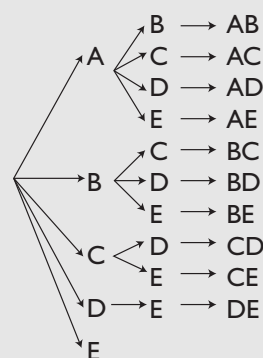
Solución:

a) $10 \cdot 9/2 = 45$

b) $C_{11,9} = C_{11,2} = 11 \cdot 10/2 = 55$

38 Con las letras A, B, C, D y E forma todas las palabras que puedas de dos letras sin que se repita ningún par de palabras, tengan o no sentido, y de modo que ningún par de palabras tenga las mismas letras.

Solución:



$$C_{5,2} = 5 \cdot 4/2 = 10$$

39 Disponemos de 5 frutas diferentes para preparar zumos de dos sabores. ¿Cuántos zumos podemos hacer?

Solución:

- a) $E = \{A, B, C, D, E\}$, $m = 5$. Dos ejemplos significativos son: AB, BC, $p = 2$
- b) No influye el orden \Rightarrow Combinaciones.
- c) $C_{5,2} = 5 \cdot 4/2 = 10$

- 40** En una comunidad que está formada por 20 vecinos, se quiere elegir una junta formada por un presidente, un secretario y un tesorero. ¿De cuántas formas se puede elegir la junta?

Solución:

- a) $E = \{1, 2, 3, 4, \dots, 20\}$, $m = 20$. Dos ejemplos significativos son: 529, 517, $p = 3$
- b) Influye el orden, no entran todos los elementos y no puede haber repetición \Rightarrow Variaciones ordinarias.
- c) $V_{20,3} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$

- 41** De una baraja española de 40 cartas se cogen 4 cartas sin devolución. ¿De cuántas formas se pueden coger?

Solución:

- a) $E = \{1, 2, 3, 4, \dots, 40\}$, $m = 40$. Dos ejemplos significativos son: 1579, 1568, $p = 4$
- b) No influye el orden \Rightarrow Combinaciones ordinarias.
- c) $C_{40,4} = \binom{40}{4} = 91\,390$

- 42** ¿De cuántas formas se pueden colocar 6 personas alrededor de una mesa circular?

Solución:

- a) $E = \{1, 2, 3, 4, \dots, 6\}$, $m = 6$. Dos ejemplos significativos son: 123456, 123564, $p = 6$
- b) Influye el orden, entran todos los elementos y no puede haber repetición \Rightarrow Permutaciones circulares.
- c) $PC_6 = 5! = 120$

- 43** Halla, usando la calculadora:

- a) $C_{10,5}$ b) $C_{15,7}$

Solución:

- a) 252 b) 6435

3. Experimentos aleatorios simples

- 44** Sean $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{3, 6, 9\}$. Calcula:
- a) $A \cup B$
- b) $A \cap B$
- c) ¿A y B son compatibles o incompatibles?
- d) \bar{A}
- e) \bar{B}

Solución:

- a) $\{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$
- b) $\{3, 9\}$
- c) A y B son compatibles.
- d) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$
- e) $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$

- 45** Halla la probabilidad de obtener múltiplo de 3 al lanzar un dado de 6 caras.

Solución:

- $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $A = \{3, 6\}$
- $P(A) = 2/6 = 1/3$

- 46** Se sabe que $P(A) = 2/5$. Halla $P(\bar{A})$

Solución:

- $P(\bar{A}) = 1 - 2/5 = 3/5$

- 47** Se lanzan 100 chinchetas al aire y 66 quedan con la punta hacia arriba. Halla la frecuencia relativa de que la chincheta no quede con la punta hacia arriba.

Solución:

- $f(\text{No } \uparrow) = \frac{34}{100} = 0,34$

- 48** Se sabe que:

$P(A) = 3/4, P(B) = 2/5$ y $P(A \cup B) = 8/9$

Calcula:

$P(A \cap B)$

Solución:

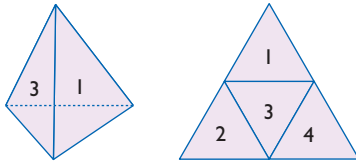
$3/4 + 2/5 - P(A \cap B) = 8/9$

$P(A \cap B) = 47/180$

Ejercicios y problemas

4. Experimentos aleatorios compuestos

- 49** Calcula la probabilidad de que al lanzar dos dados de 4 caras numeradas del 1 al 4 la suma de números obtenidos sea 6. ¿Qué suma es la más probable?



Solución:

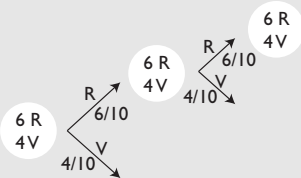
$$P(6) = 3/16$$

	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

El más probable es el 5, porque es el que más veces aparece.

- 50** Se extrae una bola de una urna que contiene 6 bolas rojas y 4 verdes, se observa si ha sido roja y se vuelve a introducir; luego se extrae otra bola. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean rojas?

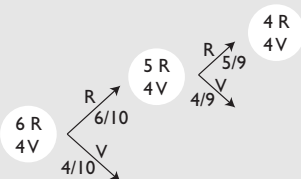
Solución:



$$P(RR) = 6/10 \cdot 6/10 = 9/25$$

- 51** Se extraen de una vez dos bolas de una urna que contiene 6 bolas rojas y 4 verdes. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean rojas?

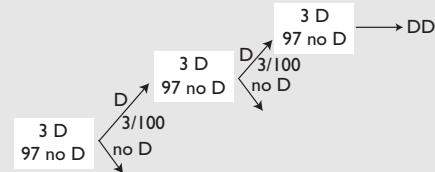
Solución:



$$P(RR) = 6/10 \cdot 5/9 = 1/3$$

- 52** Una máquina produce 100 tornillos de los que 3 son defectuosos. Se coge un tornillo, se mira si es defectuoso y se devuelve. Halla la probabilidad de que al coger aleatoriamente el segundo sea defectuoso, con la condición de que el primero también haya sido defectuoso. ¿Cómo son ambos sucesos, dependientes o independientes?

Solución:

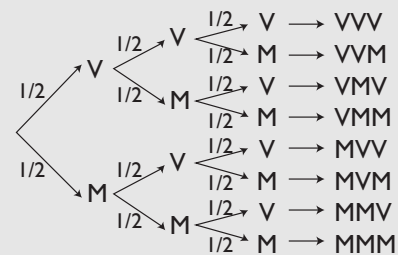


$$P(D/D) = 3/100$$

El segundo suceso D/D es independiente del primero D, pues no depende de si ha salido D o no D

- 53** Una familia tiene tres hijos. Halla la probabilidad de que uno sea varón.

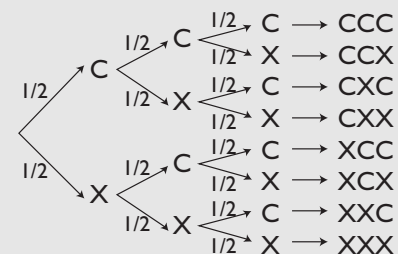
Solución:



Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total.
 $P(VMM) + P(MVM) + P(MMV) = 1/8 + 1/8 + 1/8 = 3/8$

- 54** Se lanzan tres monedas al aire. Halla la probabilidad de que las tres sean cruz.

Solución:



Se aplica la regla del producto o de la probabilidad compuesta.

$$P(XXX) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$$

Para ampliar

55 Calcula mentalmente los siguientes números combinatorios:

a) $\binom{50}{0}$

b) $\binom{50}{50}$

Solución:

a) 1

b) 1

56 Calcula mentalmente los siguientes números combinatorios:

a) $\binom{100}{1}$

b) $\binom{100}{98}$

Solución:

a) 100

b) 4950

57 ¿Cuántos números diferentes de cuatro cifras se pueden formar?

Solución:

a) $E = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$, $m = 10$. Dos ejemplos significativos son: 1 122, 2 135, $p = 4$

b) Influye el orden, no entran todos los elementos y puede haber repetición \Rightarrow Variaciones con repetición.

Hay que quitar todos los que son menores de 1 000

c) $VR_{10,4} - 1\,000 = 10^4 - 1\,000 = 9\,000$

58 ¿Cuántos números diferentes de cinco cifras se pueden formar con las cifras impares de forma que no se repita ninguna cifra? ¿Cuántos de ellos son impares?

Solución:

a) $E = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $m = 5$. Dos ejemplos significativos son: 13 597, 53 197, $p = 5$

b) Influye el orden, entran todos los elementos y no puede haber repetición \Rightarrow Permutaciones ordinarias.

c) $P_5 = 5! = 120$

Son impares los que terminan en número impar; en este caso, todos.

59 Un alumno de 4º B tiene 5 camisetas, 4 pantalones y 3 pares de zapatillas de deporte. ¿De cuántas formas diferentes puede vestirse para ir a entrenar?

Solución:

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ formas diferentes.

60 Si lanzamos al aire un dado y una moneda, ¿cuántos resultados diferentes podemos obtener?

Solución:

$6 \cdot 2 = 12$ resultados diferentes.

61 Cinco amigos van al cine y sacan las entradas seguidas. ¿De cuántas formas se pueden sentar?

Solución:

a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $m = 5$. Dos ejemplos significativos son: 12345, 54123, $p = 5$

b) Influye el orden, entran todos los elementos y no puede haber repetición \Rightarrow Permutaciones ordinarias.

c) $P_5 = 5! = 120$

62 Con las letras de la palabra MESA, ¿cuántas palabras se pueden formar, tengan o no sentido?

Solución:

a) $E = \{A, E, M, S\}$, $m = 4$. Dos ejemplos significativos son: MESA, ESMA, $p = 4$

b) Influye el orden, entran todos los elementos y no puede haber repetición \Rightarrow Permutaciones ordinarias.

c) $P_4 = 4! = 24$

63 Calcula el valor de x en la siguiente igualdad:

$$\binom{5}{2} = \binom{5}{x}$$

Ejercicios y problemas

Solución:

$x = 2$, o bien $x = 3$

64 Calcula el valor de x en la siguiente igualdad:

$$V_{x,3} = 30x$$

Solución:

$$x(x-1)(x-2) = 30x$$

$$x^2 - 3x + 2 = 30$$

$$x = 7$$

65 Calcula el valor de x en la siguiente igualdad:

$$V_{x,4} = 6V_{x,2}$$

Solución:

$$x(x-1)(x-2)(x-3) = 6x(x-1)$$

Se simplifican ambos miembros entre $x(x-1)$, ya que $x > 3$

$$x^2 - 5x + 6 = 6$$

$$x = 5$$

66 Calcula el valor de x en la siguiente igualdad:

$$P_x = 20P_{x-2}$$

Solución:

$$x! = 20(x-2)!$$

$$x(x-1) = 20$$

$$x = 5$$

67 Calcula el valor de x en la siguiente igualdad:

$$2C_{x,2} = V_{x,2}$$

Solución:

$$2x(x-1)/2 = x(x-1)$$

$$x(x-1) = x(x-1)$$

Vale cualquier $x > 1$

68 Una urna contiene 7 bolas rojas, 5 verdes y 3 azules. Si se extrae una bola, ¿qué probabilidad hay de que

- a) sea verde?
- b) no sea roja?
- c) sea roja o verde?

Solución:

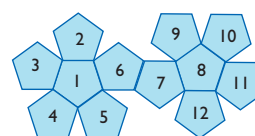
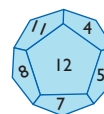
$$E = \{7R, 5V, 3A\}$$

a) $P(\text{verde}) = 5/15 = 1/3$

b) $P(\text{no roja}) = 8/15$

c) $P(\text{roja o verde}) = 12/15 = 4/5$

69 Se lanza un dado con forma de dodecaedro y las caras numeradas del 1 al 12. Halla la probabilidad de que el número obtenido sea múltiplo de 3



Solución:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$A = \{3, 6, 9, 12\}$$

$$P(A) = 4/12 = 1/3$$

70 Se extrae una carta de una baraja española de 48 cartas. Calcula la probabilidad de que sea un nueve.

Solución:

$$E = \{48 \text{ cartas}\}$$

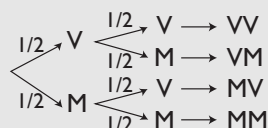
$$A = \{9O, 9C, 9E, 9B\}$$

$$P(A) = 4/48 = 1/12$$

71 En una familia con dos hijos, ¿qué probabilidad tiene de que sean

- a) los dos varones?
- b) uno varón y el otro mujer?

Solución:



a) Se aplica la regla del producto o de la probabilidad compuesta.

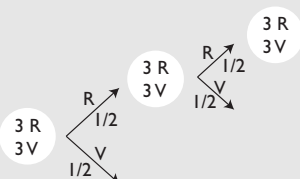
$$P(VV) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$$

b) Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total.

$$P(VM) + P(MV) = 1/4 + 1/4 = 1/2$$

72 Una urna contiene 3 bolas rojas y 3 verdes. Se extrae una bola y se observa el color; se vuelve a introducir y se extrae otra bola. Calcula la probabilidad de que sean las dos rojas.

Solución:

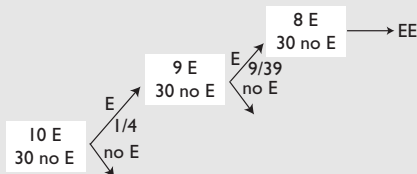


Se aplica la regla del producto o de la probabilidad compuesta.

$$P(RR) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$$

73 Se extraen de una vez dos cartas de una baraja española de 40 cartas. Calcula la probabilidad de que las dos sean de espadas.

Solución:



Se aplica la regla del producto o de la probabilidad compuesta.

$$P(EE) = 1/4 \cdot 9/39 = 3/52$$

74 Se lanzan al aire dos dados de 4 caras numeradas del 1 al 4. Calcula la probabilidad de que la suma de los números obtenidos sea mayor que 5

Solución:

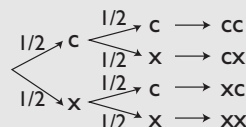
	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

$$P(\text{más de } 5) = 6/16 = 3/8$$

75 Se lanzan al aire dos monedas. Calcula la probabilidad de obtener a lo sumo una cara.



Solución:



$$P(CC) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$$

$$P(\text{a lo sumo una cara}) = 1 - P(CC) = 1 - 1/4 = 3/4$$

76 En un dado de quinielas, halla la probabilidad de no obtener el 2

Solución:

$$E = \{1, 1, 1, X, X, 2\}$$

$$P(\text{no obtener } 2) = 5/6$$

Con calculadora

77 Halla, utilizando la calculadora:

a) $V_{9,4}$

b) $VR_{3,15}$

Solución:

a) 3 024

b) 14 348 907

78 Halla, utilizando la calculadora:

a) P_{12}

b) PC_9

Solución:

a) $12! = 479\,001\,600$

b) $8! = 40\,320$

79 Halla, utilizando la calculadora:

a) $C_{12,5}$

b) $C_{12,7}$

Solución:

a) 792

b) 792

Ejercicios y problemas

Problemas

80 En la carta de un restaurante se puede elegir un menú compuesto de un primer plato, un segundo plato y un postre. Hay para elegir 8 primeros platos, 5 segundos y 6 postres. ¿Cuántos menús diferentes se pueden elegir?

Solución:

$$8 \cdot 5 \cdot 6 = 240 \text{ menús.}$$

81 Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, ¿cuántos números de cinco cifras se pueden formar sin repetir los dígitos? ¿Cuántos de ellos son pares?

Solución:

a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $m = 5$. Dos ejemplos significativos son: 23 541, 31 524, $p = 5$

b) Influye el orden, entran todos los elementos y no puede haber repetición \Rightarrow Permutaciones ordinarias.

$$c) P_5 = 5! = 120$$

Serán pares todas las que terminen en 2 y 4

$$2 \cdot P_4 = 2 \cdot 4! = 48$$

82 En un trofeo de verano juegan cuatro equipos. ¿De cuántas formas se pueden emparejar?

Solución:

a) $E = \{A, B, C, D\}$, $m = 4$. Dos ejemplos significativos son: AB, AC, $p = 2$

b) No influye el orden. \Rightarrow Combinaciones ordinarias.

$$c) C_{4,2} = 4 \cdot 3/2 = 6$$

83 Existen 5 pueblos colocados en los vértices de un pentágono regular, y se quiere construir una carretera para unir cada dos pueblos. ¿Cuántas carreteras hay que hacer?

Solución:

a) $E = \{A, B, C, D, E\}$, $m = 5$. Dos ejemplos significativos son: AC, BC, $p = 2$

b) No influye el orden \Rightarrow Combinaciones ordinarias.

$$c) C_{5,2} = 5 \cdot 4/2 = 10$$

84 El AVE que va de Madrid a Sevilla tiene 5 estaciones. ¿Cuántos billetes diferentes se pueden sacar?

Solución:

a) $E = \{A, B, C, D, E\}$, $m = 5$. Dos ejemplos significativos son: AC, CA, $p = 2$

b) Influye el orden, no entran todos los elementos y no puede haber repetición \Rightarrow Variaciones ordinarias.

$$c) V_{5,2} = 5 \cdot 4 = 20$$

85 Un byte está formado por ceros y unos, y en total son 8. ¿Cuántos bytes diferentes se pueden presentar?

Solución:

a) $E = \{0, 1\}$, $m = 2$. Dos ejemplos significativos son: 10010111, 11111111, $p = 8$

b) Influye el orden, no entran todos los elementos y puede haber repetición. \Rightarrow Variaciones con repetición.

$$c) VR_{2,8} = 2^8 = 256$$

86 Tenemos siete clases de fruta para obtener batidos de tres sabores. ¿Cuántos sabores se pueden obtener?

Solución:

a) $E = \{A, B, C, D, E, F, G\}$, $m = 7$. Dos ejemplos significativos son: BDE, BFG, $p = 3$

b) No influye el orden \Rightarrow Combinaciones ordinarias.

$$c) C_{7,3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

87 En un certamen literario hay tres premios: ganador, finalista y accésit. Si se presentan 10 personas, ¿de cuántas formas se pueden dar los tres premios?

Solución:

a) $E = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$, $m = 10$. Dos ejemplos significativos son: AGC, CGA, $p = 3$

b) Influye el orden, no entran todos los elementos y no puede haber repetición \Rightarrow Variaciones ordinarias.

$$c) V_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

88 ¿Cuántas banderas de tres colores diferentes se pueden formar con 8 colores?

Solución:

- a) $E = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$, $m = 8$. Dos ejemplos significativos son: ADE, DAE, $p = 3$
- b) Influye el orden, no entran todos los elementos y no puede haber repetición \Rightarrow Variaciones ordinarias.
- c) $V_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

89 Una familia tiene 5 hijos. ¿Cuántas posibilidades hay con respecto al sexo de los hijos?

Solución:

- a) $E = \{V, M\}$, $m = 2$. Dos ejemplos significativos son: VVMM, MMMM, $p = 5$
- b) Influye el orden, no entran todos los elementos y puede haber repetición \Rightarrow Variaciones con repetición.
- c) $VR_{2,5} = 2^5 = 32$

90 Con las letras de la palabra RATON, ¿cuántas palabras de cinco letras se pueden formar, tengan o no sentido? ¿Cuántas empiezan por consonante?

Solución:

- a) $E = \{A, N, O, R, T\}$, $m = 5$. Dos ejemplos significativos son: RATON, NOTAR, $p = 5$
 - b) Influye el orden, entran todos los elementos y no puede haber repetición \Rightarrow Permutaciones ordinarias.
 - c) $P_5 = 5! = 120$
- Empiezan por consonante: $3 \cdot P_4 = 3 \cdot 4! = 72$

91 Calcula la probabilidad de acertar una quiniela de pleno al 15 si se cubre una apuesta.

Solución:

E tiene $VR_{3,15} = 3^{15} = 14348907$ posibilidades.
 $P(\text{acertar}) = 1/14348907$

92 En un grupo de 80 personas, 50 escuchan la radio, 60 ven la televisión y 30 escuchan la radio y ven la televisión. Halla la probabilidad de que, elegida una persona al azar, no escuche la radio ni vea la televisión.

Solución:

$P(R) = 50/80 = 5/8$

$P(T) = 60/80 = 3/4$

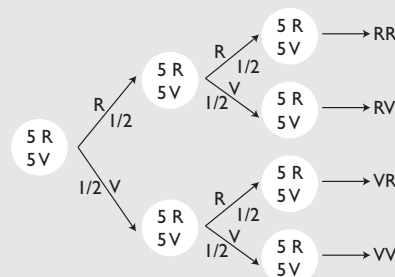
$P(R \cap T) = 30/80 = 3/8$

$P(R \cup T) = 5/8 + 3/4 - 3/8 = 1$

$P(\text{no escuchar la radio, ni ver la televisión}) = 1 - P(R \cup T) = 1 - 1 = 0$

93 Una urna contiene 5 bolas rojas y 5 verdes. Se extrae una bola y se observa el color, se vuelve a introducir y se extrae otra bola. Calcula la probabilidad de que una sea roja y otra sea verde.

Solución:

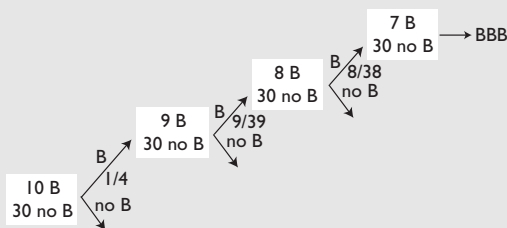


Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total.

$P(RV) + P(VR) = 1/2 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 1/2 = 1/4 + 1/4 = 1/2$

94 Se extraen de una vez tres cartas de una baraja española de 40 cartas. Calcula la probabilidad de que las tres sean de bastos.

Solución:



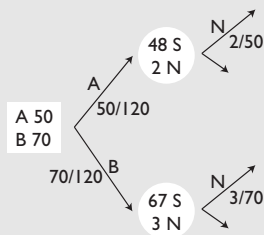
Se aplica la regla del producto o de la probabilidad compuesta.

$P(BBB) = 1/4 \cdot 9/39 \cdot 8/38 = 3/247$

95 Se compran 50 ordenadores de una marca A y 70 de una marca B. De la marca A hay 2 que no funcionan; y de la marca B hay 3 que no funcionan. Si se elige al azar uno de los ordenadores, ¿cuál es la probabilidad de que no funcione?

Ejercicios y problemas

Solución:

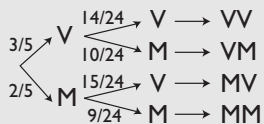


Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total.

$$P(AN) + P(BN) = 50/120 \cdot 2/50 + 70/120 \cdot 3/70 = 1/24$$

- 96** En una clase hay 15 chicos y 10 chicas. Si se eligen dos alumnos al azar, calcula la probabilidad de que los dos sean chicas.

Solución:

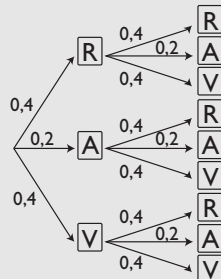


Se aplica la regla del producto o de la probabilidad compuesta.

$$P(MM) = 2/5 \cdot 9/24 = 3/20$$

- 97** Una persona cruza dos semáforos para ir al trabajo. La probabilidad de que cada uno de ellos esté rojo es de 0,4; de que esté ámbar, 0,2, y de que esté verde, 0,4. Calcula la probabilidad de que uno esté verde y el otro rojo.

Solución:

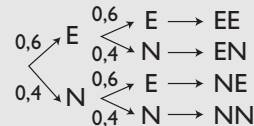


Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total.

$$P(RV) + P(VR) = 0,4 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,4 = 0,32$$

- 98** Un jugador de baloncesto tiene una probabilidad de 0,6 de hacer un triple. Si hace dos lanzamientos de triple, ¿qué probabilidad tiene de que no enceste ninguno?

Solución:



Se aplica la regla del producto o de la probabilidad compuesta.

$$P(NN) = 0,4 \cdot 0,4 = 0,16$$

Para profundizar

- 99** Un equipo de fútbol está formado por 11 jugadores. 6 se ponen de pie, y delante los otros cinco agachados. ¿De cuántas formas se pueden colocar para hacer una foto si el portero siempre está de pie el primero por la izquierda?

Solución:

Dejaremos el portero fijo y no lo tendremos en cuenta a la hora de contar.

- a) $E = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$, $m = 10$. Dos ejemplos significativos son: AGCDEFBIJH, IGECABDFHJ, $p = 10$
- b) Influye el orden, entran todos los elementos y no puede haber repetición \Rightarrow Permutaciones ordinarias.
- c) $P_{10} = 10! = 3\,628\,800$

- 100** ¿De cuántas formas puede elegir un equipo de fútbol, formado por un portero, tres defensas, 2 medios, 2 extremos y 3 delanteros, un entrenador que tiene 25 jugadores, de los que 3 son porteros; 6, defensas; 4, medios; 4, extremos, y el resto, delanteros?

Solución:

$$C_{3,1} \cdot C_{6,3} \cdot C_{4,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{8,3} = 3 \cdot 20 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 56 = 120\,960$$

- 101** ¿Cuántas matrículas totales se pueden hacer con el sistema actual, que está formado de cuatro números y tres letras. Las letras disponibles son 20.

Solución:

$$VR_{10,4} \cdot VR_{20,3} = 10^4 \cdot 20^3 = 10\,000 \cdot 8\,000 = 80\,000\,000$$

- 102** Una bolsa tiene 5 bolas numeradas del 1 al 5. Sacamos una bola, anotamos el número y la volvemos a introducir; volvemos a repetir el proceso otras dos veces. ¿Cuántos resultados distintos se pueden dar?

Solución:

- a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $m = 5$. Dos ejemplos significativos son: 22323, 33222, $p = 5$
- b) Influye el orden, no entran todos los elementos y puede haber repetición \Rightarrow Variaciones con repetición.
- c) $VR_{5,5} = 5^5 = 3\,125$

- 103** Una bolsa tiene 5 bolas numeradas del 1 al 5. Sacamos tres bolas de una vez. ¿Cuántos resultados distintos se pueden presentar?

Solución:

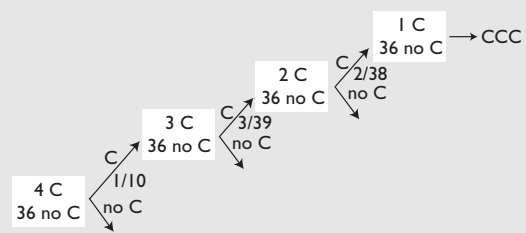
- a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $m = 5$. Dos ejemplos significativos son: 125, 235, $p = 3$
- b) No influye el orden \Rightarrow Combinaciones ordinarias.
- c) $C_{5,3} = 5 \cdot 4/2 = 10$

- 104** Con las cifras impares, ¿cuántos números de 3 cifras se pueden formar sin repetir ninguna? ¿Cuántos son mayores de 500?

Solución:

- a) $E = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $m = 5$. Dos ejemplos significativos son: 975, 795, $p = 3$
- b) Influye el orden, no entran todos los elementos y no puede haber repetición \Rightarrow Variaciones ordinarias.
- c) $V_{5,3} = 5^3 = 125$
- Serán mayores de 500 todos los que empiecen por 5, 7 o 9
- $3 \cdot VR_{4,2} = 3 \cdot 4^2 = 48$

- 105** Se extraen, de una baraja española de 40 cartas, tres cartas al azar. Calcula la probabilidad de que sean caballos las tres.

Solución:

Se aplica la regla del producto o de la probabilidad compuesta.

$$P(CCC) = 1/10 \cdot 3/39 \cdot 2/38 = 1/2\,470$$

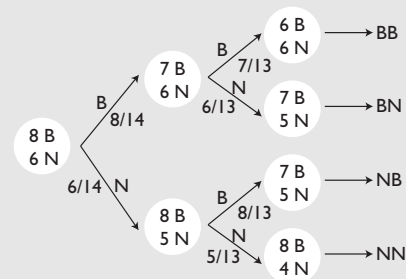
- 106** Se lanzan al aire dos dados, uno de 6 caras numeradas del 1 al 6 y el otro de 4 caras numeradas del 1 al 4. ¿Qué probabilidad hay de que sumen 7?

Solución:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

$$P(9) = 4/24 = 1/6$$

- 107** En un cajón tenemos 8 calcetines blancos y 6 negros. Si sacamos dos aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que los dos sean de distinto color?

Solución:

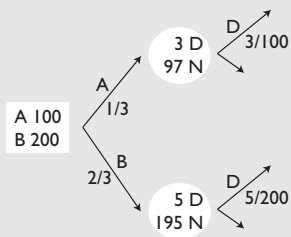
Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total.

$$P(BN) + P(NB) = 8/14 \cdot 6/13 + 6/14 \cdot 8/13 = 48/91$$

Ejercicios y problemas

- 108** Se tienen dos máquinas produciendo tornillos. Una produce 100 tornillos, de los que 3 son defectuosos, y la otra produce 200 tornillos, de los que 5 son defectuosos. Si se escoge al azar uno de los 300 tornillos, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

Solución:



Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total.

$$P(AD) + P(BD) = 1/3 \cdot 3/100 + 2/3 \cdot 5/200 = 2/75$$

- 109** Se elige aleatoriamente una ficha de un dominó. ¿Qué probabilidad hay de que sea doble?

Solución:

$$P(\text{doble}) = 7/28 = 1/4$$

- 110** Se ha trucado un dado de forma que:
 $P(1) = P(3) = P(5)$, $P(2) = P(4) = P(6) = 2P(1)$
a) Halla la probabilidad de obtener un 3
b) Halla la probabilidad de obtener un 6

Solución:

$$P(1) = P(3) = P(5) = x$$

$$P(2) = P(4) = P(6) = 2x$$

$$3x + 6x = 1 \Rightarrow x = 1/9$$

a) $P(3) = 1/9$

b) $P(6) = 2/9$

Aplica tus competencias

111 ¿Cuántas palabras hay de 8 caracteres?

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

112 ¿Cuántas palabras hay de 10 caracteres?

Solución:

$VR_{2,10} = 2^{10} = 1\,024$, que se conoce con el nombre de 1 Kb (*Kilobyte*).

113 ¿Cuántas palabras hay de 20 caracteres?

Solución:

$VR_{2,20} = 2^{20} = 1\,048\,576$, que se conoce con el nombre de 1 Mb (*Megabyte*).

114 ¿Cuántas palabras hay de 30 caracteres?

Solución:

$VR_{2,30} = 2^{30} = 1\,073\,741\,824$, que se conoce con el nombre de 1 Gb (*Gigabyte*).

115 ¿Cuántas palabras hay de 40 caracteres?

Solución:

$VR_{2,40} = 2^{40} = 1\,099\,511\,627\,776$, que se conoce con el nombre de 1 Tb (*Terabyte*).

Comprueba lo que sabes

- 1** Escribe el enunciado de la regla de Laplace y pon un ejemplo.

Solución:

La **regla de Laplace** dice que la probabilidad de un suceso A, de un espacio muestral E, formado por sucesos elementales *equiprobables*, es igual al número de casos favorables dividido por el número de casos posibles.

$$P(A) = \frac{\text{Nº de casos favorables al suceso A}}{\text{Nº de casos posibles}}$$

Sucesos equiprobables

Los sucesos elementales de un espacio muestral son *equiprobables* si tienen la misma posibilidad de presentarse; sólo en estos casos se puede aplicar la **regla de Laplace**.

Ejemplo

Halla la probabilidad de obtener un número primo al lanzar un dado de seis caras.

Espacio muestral: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Suceso $A = \{2, 3, 5\}$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$$

- 2** Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, ¿cuántos números de tres cifras se pueden formar sin repetir ninguna? ¿Cuántos son mayores de 300?

Solución:

a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $m = 5$. Dos ejemplos significativos son: 134, 341, $p = 3$

b) Influye el orden, no entran todos los elementos y no puede haber repetición \Rightarrow Variaciones ordinarias.

c) $V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Serán mayores de 300 los que empiecen por 3, 4 o 5

$$3 \cdot V_{4,2} = 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$$

- 3** Con las letras de la palabra LIBRO, ¿cuántas palabras, tengan o no sentido, se pueden formar?

Solución:

a) $E = \{B, I, L, O, R\}$, $m = 5$. Dos ejemplos significativos son: LIBRO, ROBIL, $p = 5$

b) Influye el orden, entran todos los elementos y no puede haber repetición \Rightarrow Permutaciones ordinarias.

c) $P_5 = 5! = 120$

- 4** En una clase hay 25 alumnos y se quiere hacer una comisión formada por tres alumnos. ¿De cuántas formas se puede elegir?

Solución:

a) $E = \{1, 2, 3 \dots, 25\}$, $m = 25$. Dos ejemplos significativos son: 358, 258, $p = 3$

b) No influye el orden \Rightarrow Combinaciones ordinarias.

c) $C_{25,3} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2300$

- 5** Se sabe que:

$$P(A) = 3/5, P(B) = 2/5 \text{ y } P(A \cap B) = 1/3$$

Halla:

$$P(A \cup B)$$

Solución:

$$P(A \cup B) = 3/5 + 2/5 - 1/3 = 2/3$$

- 6** Se lanzan al aire dos dados de seis caras numeradas del 1 al 6 y se suman los puntos obtenidos. ¿Qué suma de puntuaciones tiene mayor probabilidad? Halla su probabilidad.

Solución:

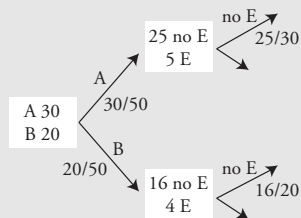
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

La suma de puntuaciones que tiene mayor probabilidad es 7, porque es el resultado que más veces se presenta.

$$P(7) = 6/36 = 1/6$$

- 7** Se prueba en 30 personas una vacuna A contra la gripe y enferman 5. Se prueba en 20 personas otra vacuna B y enferman 4. Si se elige una de las personas al azar, ¿qué probabilidad hay de que no haya enfermado?

Solución:



Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total.

$$P(\text{no E}) = 30/50 \cdot 25/30 + 20/50 \cdot 16/20 = 41/50$$

- 8** Un jugador de fútbol mete 4 goles de cada 10 tiros a puerta. Si tira 3 tiros a puerta, halla la probabilidad de que, al menos, meta un gol.

Solución:

$$P(\text{NNN}) = 6/10 \cdot 6/10 \cdot 6/10 = 27/125$$

$$P(\text{al menos 1 gol}) = 1 - P(\text{NNN}) = \\ = 1 - 27/125 = 98/125$$

Paso a paso

116 Investiga sobre la **Ley de los grandes números**: simula el lanzamiento de un dado con forma de tetraedro con las caras numeradas del 1 al 4. Haz distintos lanzamientos, cuenta el número de éstos y las frecuencias absolutas de obtener una de las caras, por ejemplo el **3**. Calcula las frecuencias relativas y represéntalas en un gráfico de líneas. ¿Hacia qué valor tienden las frecuencias relativas, lo que en definitiva es la probabilidad?

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

117 **Internet**. Abre: www.editorial-bruno.es y elige **Matemáticas, curso y tema**.

Practica

118 En la **Hoja2** del mismo libro investiga sobre la **Ley de los grandes números**: simula el lanzamiento de un dado de forma cúbica con las caras numeradas del 1 al 6. Realiza distintos lanzamientos y cuenta el número de éstos y las frecuencias absolutas de obtener una de las caras, por ejemplo el **5**. Calcula las frecuencias relativas y represéntalas en un gráfico de líneas. ¿Hacia qué valor tienden las frecuencias relativas, lo que en definitiva es la probabilidad?

Solución:

Las frecuencias relativas tienden hacia la probabilidad de $0,17 = 1/6$

119 En la **Hoja3** del mismo libro, haz otro estudio análogo al anterior para un dado de forma octaédrica, con las caras numeradas del 1 al 8, y obtener, por ejemplo, el 6. ¿Hacia qué valor tienden las frecuencias relativas, lo que en definitiva es la probabilidad?

Solución:

Las frecuencias relativas tienden hacia la probabilidad de $0,125 = 1/8$

120 En la **Hoja4** del mismo libro, haz otro estudio análogo al anterior para un dado de forma de dodecaedro, con las caras numeradas del 1 al 12, y obtener la cara 9. ¿Hacia qué valor tienden las frecuencias relativas, lo que en definitiva es la probabilidad?

Solución:

Las frecuencias relativas tienden hacia la probabilidad de $0,083 = 1/12$

121 En la **Hoja5** del mismo libro, haz otro estudio análogo al anterior para un dado de forma de icosaedro, con las caras numeradas del 1 al 20, y obtener, por ejemplo, el 15. ¿Hacia qué valor tienden las frecuencias relativas, lo que en definitiva es la probabilidad?

Solución:

Las frecuencias relativas tienden hacia la probabilidad de $0,05 = 1/20$

122 Al final, guarda el libro en tu carpeta personal con el nombre **4C14** completo con todas las hojas de cálculo.

Solución:

Haz *click* en el icono  **Guardar**